

Le bruit en $1/f$

EDOARDO MILOTTI

L'origine de ce signal aléatoire, particulièrement intéressant par le nombre de processus physiques où il intervient, reste partiellement énigmatique. On sait cependant en établir certains modèles généraux.

Allumons la radio et sélectionnons une bande où peu de stations transmettent (par exemple, la région des grandes ondes). Changeons lentement la fréquence d'accord de la radio : entre deux stations radiophoniques perceptibles, les signaux sont très faibles et difficilement audibles. Pour d'autres fréquences, nous n'entendons qu'un bruissement : ce signal est appelé «bruit». Notre oreille capte alors la traduction sonore d'un signal électrique que les circuits de la radio envoient au haut-parleur.

Un signal de bruit, aussi désordonné qu'il est possible, présente pourtant des caractéristiques spécifiques. Quand l'amplitude du signal est répartie autour d'une valeur moyenne selon une distribution de probabilité gaussienne, un tel bruit est dénommé bruit blanc gaussien.

Revenons à notre radio : nous continuons à écouter le bruit et agissons sur le bouton qui règle l'intensité des graves et des aigus ; le son est un bruissement uniforme, mais varie néanmoins selon le réglage.

Comme n'importe quel signal, le bruit peut être décomposé en composantes sinusoïdales de fréquences différentes ; le réglage des graves et des aigus filtre ces composantes. Par exemple, lorsque nous augmentons les graves, les composantes du signal qui oscillent à fréquence élevée sont atténuées. La décomposition d'un signal en composantes sinusoïdales a été analysée par le mathématicien Fourier (voir l'article sur Jean-Baptiste Fourier dans *Les mathématiciens*, Bibliothèque *Pour la Science*).

Grâce à cette décomposition, on sait caractériser le «bruit blanc» : toutes les fréquences y sont présentes avec la même amplitude ; tout comme,

dans la lumière blanche, toutes les couleurs sont représentées avec une intensité égale.

Lorsque nous filtrons le bruit blanc, nous obtenons évidemment un bruit différent qui est dénommé «coloré». Un bruit de type gaussien est caractérisé par sa densité spectrale, une fonction qui exprime la répartition de la puissance du signal entre les différentes fréquences. La densité spectrale du bruit blanc est constante, tandis que le spectre du bruit blanc filtré décroît avec la fréquence.

Nombre de phénomènes physiques engendrent du bruit, et un grand nombre d'entre eux produisent un bruit (à peu près) blanc, quelques-uns des bruits colorés. Un bruit coloré particulièrement important est le bruit «en $1/f$ ». Dans ce bruit, la puissance associée à une composante de Fourier de fréquence f est inversement proportionnelle à f , et la densité spectrale présente un aspect particulièrement simple lorsqu'elle est représentée sur un graphique avec une échelle doublement logarithmique : la densité spectrale en fonction de la fréquence est une droite de pente -1 .

Dans d'autres bruits colorés similaires au bruit en $1/f$, dénommés bruits de scintillation, la puissance associée à une composante de Fourier de fréquence f est inversement proportionnelle à f^a (a étant compris entre 0,5 et 1,5). Comme dans le cas du bruit en $1/f$, la densité spectrale, lorsqu'elle est représentée sur une échelle doublement logarithmique, est une droite, mais la pente est égale à $-a$.

La première observation sur le bruit en $1/f$ remonte à 1925 : le physicien J. Johnson découvrit son existence en étudiant les fluctuations de

courant dans l'émission thermionique des tubes à vide. En 1926, W. Schottky essaya de l'interpréter théoriquement et, en 1936, C. Christenson et G. Pearson l'ont observé dans des microphones et dans des résistances au carbone. Un circuit où l'on mesure le bruit en $1/f$ est le circuit illustré sur la partie droite de la figure 5 : on observe une telle fluctuation de tension aux extrémités de l'une des deux résistances (c'est aussi une fluctuation de courant ou une fluctuation de la résistance R_j). Au cours d'expériences menées avec des résistances à film mince, le bruit mesuré est presque exactement un bruit en $1/f$, et ce, sur au moins six ordres de grandeur (voir la figure 3).

Ce type de comportement est quasi indépendant du matériau utilisé et, en fait, dépend surtout de l'épaisseur de la résistance (plus celle-ci est mince, plus le bruit en $1/f$ est caractérisé).

L'universalité du bruit en $1/f$

L'une des caractéristiques les plus étonnantes du bruit en $1/f$ est son universalité : il survient dans des dispositifs d'une extraordinaire variété. Ce fait fut mis en lumière par Benoît Mandelbrot au cours des années 1970, dans le cadre de ses travaux sur les fractales. La liste, toujours incomplète, des phénomènes où apparaît un bruit en $1/f$ inclut les fluctuations de résistance des semi-conducteurs, le battement cardiaque, les courants dans les fibres nerveuses, le taux d'insuline dans le sang d'un diabétique, l'intensité des courants océaniques, le bruit sismique, les oscillations de l'axe terrestre, l'activité solaire (voir la figure 1 ci-contre), le débit du Nil au cours des 2 000 dernières

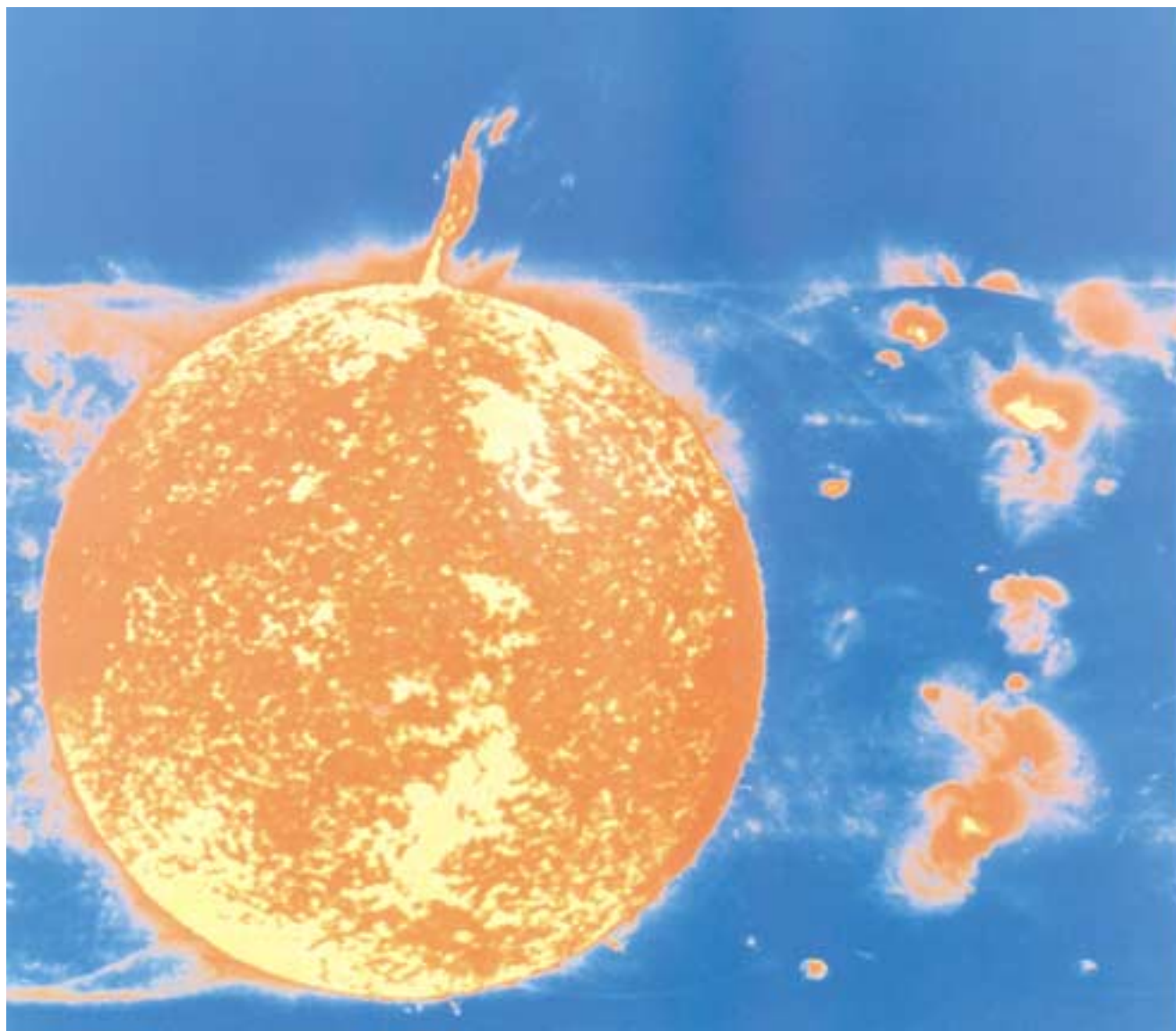
années, la lumière émise par les naines blanches, l'écoulement du sable dans un sablier, l'intensité des fluctuations du trafic routier, le courant dans les solutions ioniques, les jonctions Josephson et la lumière émise par les quasars.

Ces dernières années, la liste des phénomènes s'est enrichie de nom-

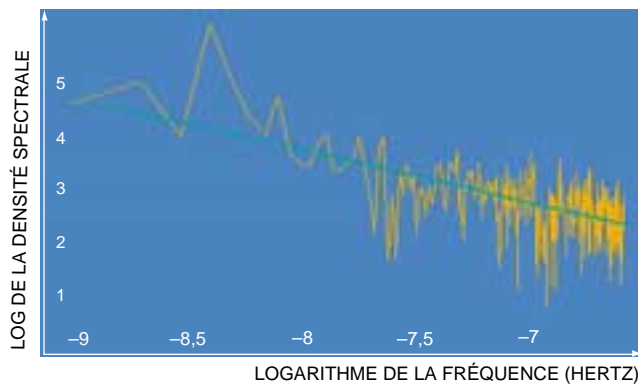
breux processus non linéaires. En outre, R. Voss et J. Clarke ont démontré que le son et la voix transmis par la radio ont également un spectre en $1/f$.

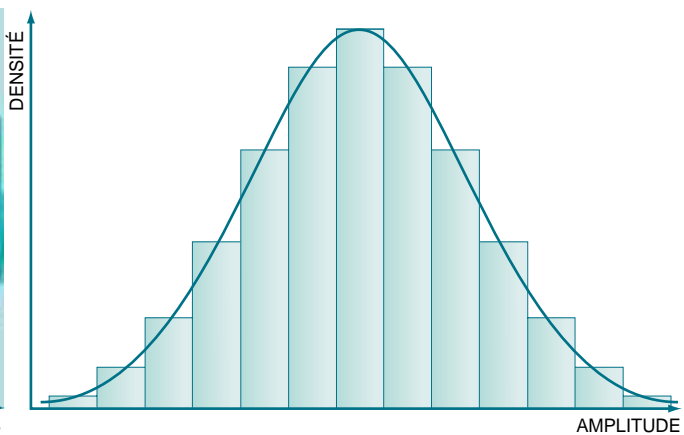
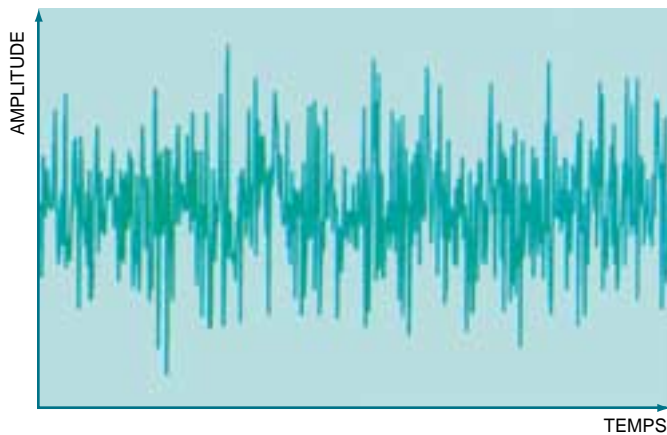
Les physiciens ont mis au point de nombreux modèles physiques pour expliquer l'apparition du bruit $1/f$, particulièrement dans les résistances et les semi-conducteurs. Il s'agit

principalement de modèles spécialisés, qui n'expliquent pas pourquoi le bruit $1/f$ apparaît dans de si nombreux processus différents. S'il existe une explication de cette universalité apparente du bruit $1/f$, celle-ci doit tenir compte de nombreuses autres observations expérimentales dont nous allons établir la liste.



1. LE NOMBRE DES TACHES SOLAIRES varie avec une période d'environ onze ans. Pour mesurer l'activité solaire, on utilise le nombre de Wolf : M est le nombre de taches solaires réunies en G groupes de taches, visibles à un instant donné, alors le nombre de Wolf est égal à $R = 10 G + M$. L'illustration de droite représente la densité spectrale du nombre de Wolf mesurée entre janvier 1953 et août 1995. Le segment bleu représente un spectre en $1/f$: le nombre de Wolf présente un spectre proche de $1/f$. Les oscillations rapides visibles surtout aux fréquences élevées sont dues aux fluctuations statistiques, tandis que le pic visible aux basses fréquences correspond à la périodicité de 11 années. La photographie, prise avec le spectroscopie installé à bord du satellite *SkyLab*, représente la lumière émise par la surface du Soleil.





2. BRUIT BLANC gaussien (amplitude du signal en fonction du temps). Pour obtenir cette représentation, on a échantillonné 500 fois un processus qui engendre un bruit blanc : la caractéristique principale de ce type de bruit est qu'il ne possède pas de mémoire, dans le sens

où l'amplitude de chaque partie est totalement indépendante de l'amplitude des échantillons précédents. En outre, les amplitudes sont réparties autour de leur valeur moyenne selon une densité de probabilité gaussienne.

(a) Le bruit en $1/f$ est presque toujours gaussien. Cela semble indiquer que ce bruit résulte de la superposition de nombreux processus élémentaires indépendants et semble exclure des mécanismes non linéaires.

(b) Le bruit en $1/f$ est stationnaire : ses caractéristiques moyennes restent constantes dans le temps.

(c) En général, on n'observe pas d'aplatissement du spectre à basses fréquences. Des observations précises du bruit en $1/f$ dans les semi-conducteurs montrent qu'il s'étend jusqu'aux fréquences les plus basses observables en laboratoire (environ 10^{-7} hertz).

(d) Enfin, il est rare que l'on observe expérimentalement des densités spectrales qui soient exactement du type $1/f$. Il est bien plus fréquent de rencontrer des spectres du type $1/f^\alpha$, avec α compris entre 0,8 et 1,4.

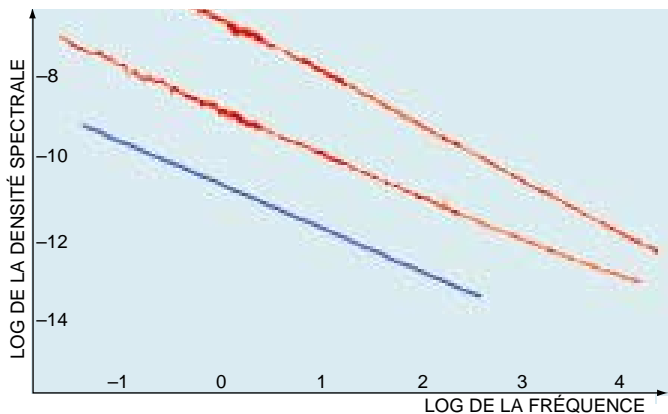
Il convient d'ajouter que, dans un système physique où l'on peut

associer une puissance (et donc une énergie) à l'amplitude du bruit, un «vrai» bruit en $1/f$ présente une caractéristique indésirable. La puissance totale, somme de la puissance associée à chaque composante de Fourier, est infinie.

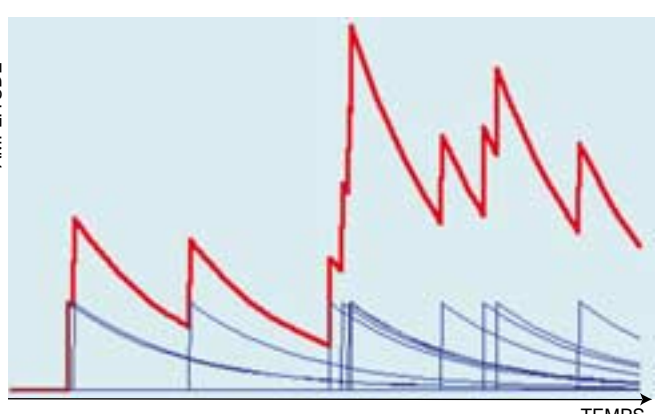
Pour mieux comprendre, prenons d'abord le cas d'un bruit blanc : ses composantes de Fourier ont toutes la même puissance, indépendante de la fréquence, et donc la puissance totale d'un bruit blanc est infinie. En réalité, il n'existe aucun bruit qui soit véritablement blanc, et la puissance ne peut être constante que jusqu'à une certaine fréquence maximale. En effet, des fréquences très élevées ne sont possibles que dans des systèmes physiques qui répondent aux sollicitations de manière extrêmement rapide. Tôt ou tard, l'inertie d'un système physique intervient et la densité spectrale s'annule.

Un phénomène analogue survient pour le bruit en $1/f$, mais, pour les mêmes raisons, il n'y a pas, là non plus, matière à inquiétude. La difficulté associée au bruit en $1/f$ est que la densité spectrale croît de manière indéfinie lorsque la fréquence tend vers zéro, et, pour cette raison, la puissance totale tend vers l'infini. Malheureusement, dans ce cas, aucune raison physique ne vient à notre secours pour éliminer la difficulté.

Dans les systèmes physiques observables, l'énergie totale (et donc la puissance) est finie, ce qui interdit un véritable bruit en $1/f$, tout comme un véritable bruit blanc. À des fréquences suffisamment basses, nous devrions observer un aplatissement de la densité spectrale d'un bruit en $1/f$, de manière que le bruit produit par le système redevienne là un bruit blanc et que la puissance totale reste finie.



3. DENSITÉS SPECTRALES DES FLUCTUATIONS DE TENSION mesurées sur deux résistances à film mince (en rouge), une en bioxyde d'iridium et à une température de 556 K et l'autre en ruthénium à 300 K. Les spectres expérimentaux sont voisins d'un spectre en $1/f$ (en bleu) dans une région qui couvre six ordres de grandeur.



4. DE NOMBREUX SYSTÈMES physiques reviennent à l'équilibre selon une décroissance exponentielle. Lorsqu'un tel système physique est excité par une succession d'impulsions brèves et aléatoires, la courbe de réponse globale (rouge) est donnée par la somme des réponses exponentielles (bleu). Le bruit associé est en $1/f^2$.

Enfin, pour satisfaire le critère d'universalité, l'explication mathématique ne doit faire référence à aucun modèle physique spécifique.

Voyons à présent comment on peut engendrer un bruit de type $1/f$. On part de deux constatations : la première est qu'il est facile de réaliser un générateur de bruit blanc ; la seconde, est qu'il existe dans la nature un grand nombre de systèmes physiques qui peuvent se « charger » d'une manière ou d'une autre et qui, ensuite, se déchargent lentement selon une loi de type exponentiel.

Bruit blanc, bruit en $1/f^2$ et constitution du bruit en $1/f$

Une succession de brèves impulsions qui apparaissent aléatoirement et indépendamment correspond à un bruit blanc ; nous pouvons utiliser chaque impulsion pour charger un système physique qui se décharge de manière exponentielle. Les décharges individuelles associées à chaque impulsion s'additionnent pour constituer une courbe de réponse globale. Le système physique avec décharge exponentielle a transformé le bruit blanc en un bruit différent, et l'on démontre que ce nouveau bruit présente une densité spectrale de type $1/f^2$. Ce résultat semble prometteur

puisque, en envisageant un processus aléatoire très simple, nous sommes « presque » arrivés au bruit en $1/f$. Toutefois, le passage du bruit en $1/f^2$ au bruit en $1/f$ est assez difficile, parce qu'il existe une hypothèse additionnelle très forte et difficilement justifiable : la courbe de décharge doit être variable, comme si les caractéristiques du système étaient changées d'une impulsion à l'autre.

Un système physique idéalisé (proposé par l'auteur) comme celui de la figure 7 présente justement des courbes de décharges différentes d'un moment à l'autre. Le système est constitué de divers éléments tous identiques, qui peuvent être chargés comme ils l'étaient précédemment et qui se déchargent toujours tous de la même manière. Certains éléments communiquent, entre eux et avec l'extérieur, de sorte que les impulsions proviennent tant de l'extérieur que d'un autre nœud en train de se décharger. En outre, on suppose que les liaisons entre les nœuds sont perturbées par un bruit blanc et que la charge est transférée d'un nœud à l'autre de manière partiellement aléatoire. Le nombre de liaisons entre un nœud et ses voisins peut être variable, tout comme l'importance de la liaison peut être plus ou moins grande, dans le sens où le transfert de charge

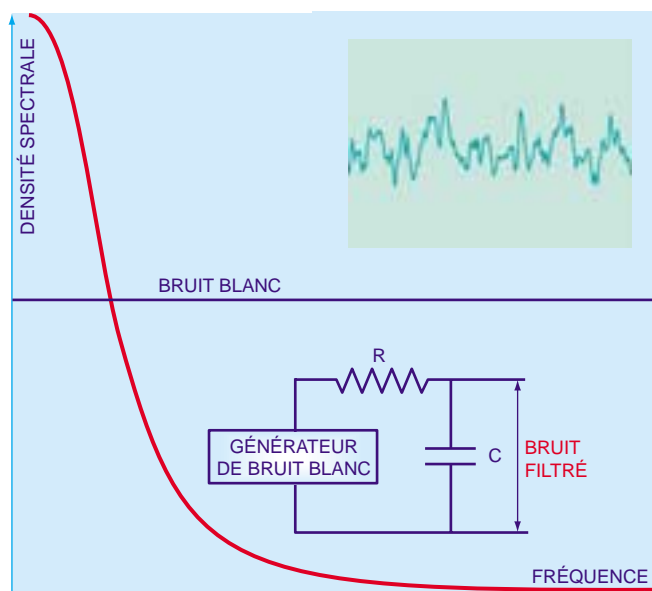
peut survenir plus ou moins facilement (mais ces deux dernières caractéristiques ne sont pas essentielles).

Une mémoire physique

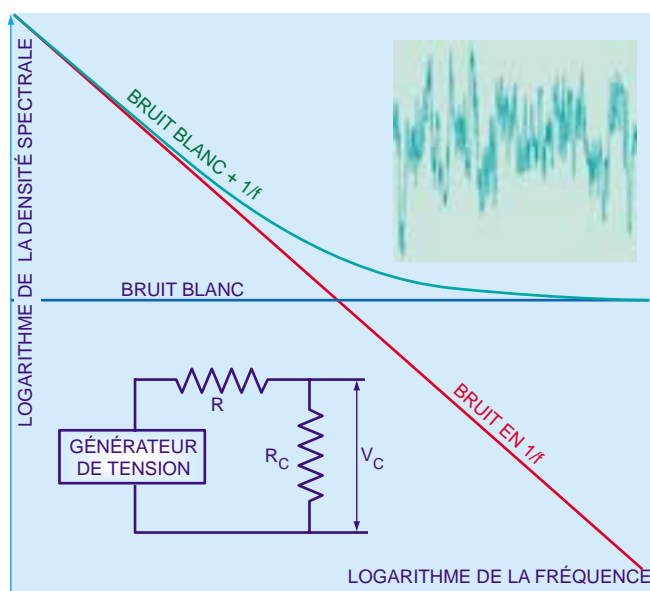
Il est évident qu'un système de ce genre se souvient, du moins en partie, de son propre passé : en effet, lorsqu'un nœud se décharge et, ce faisant, charge son voisin, il peut ensuite être chargé à son tour par ce même voisin. Son état dépend ainsi de son passé. Pour cette raison, même si les nœuds individuels se déchargent toujours de la même manière, le système se comporte globalement comme s'il présentait des temps de décharge différents.

On démontre qu'un réseau carré à deux dimensions produit un bruit en $1/f$, du moins dans une certaine bande de fréquences. En dehors de cette bande, la densité spectrale s'aplatit pour les fréquences très basses, tandis qu'elle acquiert une progression de type $1/f^2$ pour les fréquences hautes. Ce comportement est souhaitable, parce qu'il évite les divergences, tant aux basses qu'aux hautes fréquences.

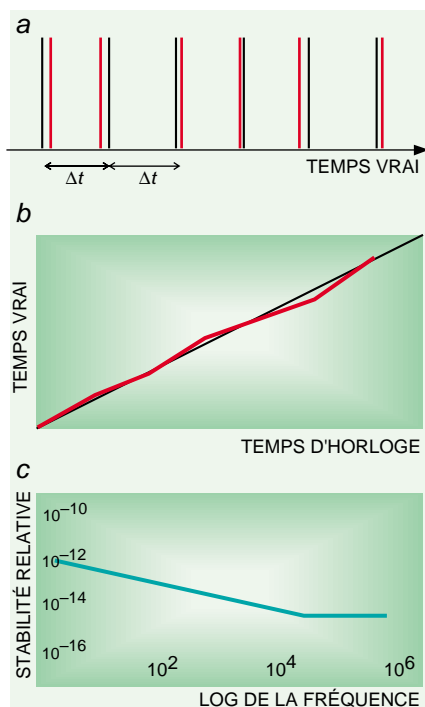
Bien évidemment, l'échange de charge dans les deux sens entre les nœuds adjacents est d'autant plus efficace pour l'établissement d'une



5. DENSITÉ SPECTRALE DU BRUIT BLANC APRÈS FILTRAGE par un filtre passif RC (en rouge à gauche). Les oscillations plus rapides (associées aux composantes de Fourier à hautes fréquences) ont disparu. À l'aide d'un simple circuit électrique (à droite), on obtient une fluctuation en $1/f$ de la tension aux extrémités d'une résistance. La densité spectrale des fluctuations de tension est représentée sur la courbe verte (échelle doublement logarithmique) ;



elle peut être décomposée en deux contributions : l'une blanche, due au bruit Johnson et une contribution $1/f$ qui n'apparaît qu'à des fréquences extrêmement basses. En haut à droite, on voit comment se présente un bruit qui présente un spectre de type $1/f$ sur l'écran d'un oscilloscope. Contrairement au bruit blanc, un processus physique qui produit ce type de bruit se souvient au moins en partie de son histoire.



6. UNE HORLOGE EXACTE donne des impulsions à intervalles réguliers, comme ceux indiqués en noir (a). Les horloges réelles sont perturbées par des signaux de bruit et donnent des impulsions à intervalles irréguliers, comme indiqué en rouge. La courbe en rouge (b) compare le temps que nous mesurons avec une horloge réelle et le temps réel. Quand le bruit qui perturbe l'horloge est un bruit blanc, la courbe oscille rapidement autour de la droite ; si notre mesure dure suffisamment longtemps, ces oscillations rapides s'annulent : l'erreur relative sur le temps mesuré devient toujours plus petite. Si, toutefois, le bruit est de type $1/f$, l'allongement de la durée de la mesure introduit alors une quantité de bruit toujours plus importante : les deux effets se compensent, et donc une extension de la durée de la mesure n'implique aucun accroissement de la précision. Cet effet est illustré en c : la stabilité relative en fréquence d'une horloge atomique au césium augmente avec le temps pendant lequel on calcule la moyenne des erreurs aléatoires, étant donné que c'est le bruit blanc qui limite initialement la précision de la mesure. À partir d'un certain point, le bruit en $1/f$ prédomine et la stabilité relative reste constante.

turbées par des bruits et délivrent des impulsions à des intervalles irréguliers. La stabilité relative d'une horloge est mesurée par la variation du nombre d'impulsions qu'elle fournit dans un intervalle de temps donné. Si le bruit qui perturbe une horloge est un bruit blanc, alors le nombre d'impulsions peut varier fortement sur des intervalles courts ; cependant, quand la longueur de l'intervalle temporel augmente, les erreurs tendent à se compenser et à s'annuler ; dès lors, l'horloge est plus précise sur de longues périodes que sur des périodes courtes. Quand la durée de la mesure augmente, l'erreur relative pendant le temps mesuré diminue.

Si, toutefois, le bruit est de type $1/f$, lorsque l'on augmente la durée de la mesure, on introduit simultanément une quantité de bruit toujours plus grande. Les deux effets se compensent, et l'allongement de la durée de la mesure n'améliore rien. Ainsi, la stabilité d'une horloge de précision croît à mesure qu'augmente le temps sur lequel on calcule la moyenne des erreurs aléatoires, parce que c'est le bruit blanc qui limite la précision de la mesure. À partir d'un certain point, toutefois, le bruit en $1/f$ devient prépondérant et la stabilité relative reste constante (voir la figure 6).

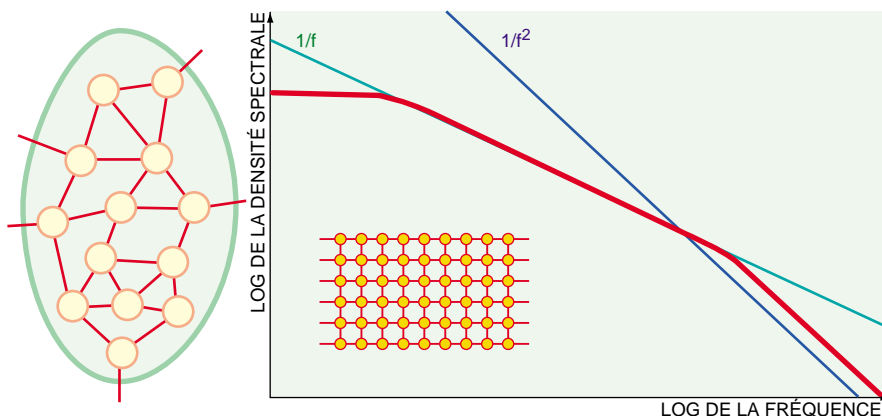
Si l'on considère l'ubiquité du bruit en $1/f$ et l'impossibilité de l'éliminer dans des systèmes mécaniques et électroniques de mesure, il est évident que analyses du même type peuvent être étendues à d'autres types de mesures de précision, et le bruit en $1/f$ constitue ainsi plus qu'une simple curiosité : il est à même d'exercer une influence profonde sur notre capacité à connaître la Nature avec précision.

«mémoire» que la sortie de la charge du système est difficile. On démontre en effet que la largeur en $1/f$ de la région centrale de la courbe est d'autant plus grande que le système se rapproche d'un système fermé. D'autres réseaux (ordonnés et désordonnés) de connectivités diverses manifestent le même comportement général, et la progression de la zone centrale est du type $1/f^a$, avec a compris entre 0,5 et 1,5.

Mesures de précision

Même les appareils de mesure, tant mécaniques qu'électriques, sont perturbés par le bruit en $1/f$, et ce phénomène entraîne des conséquences importantes dans le cas des mesures de précision ; prenons pour exemple la mesure précise du temps.

Si une horloge était parfaite, elle délivrerait des impulsions à des intervalles fixes ; en réalité, les horloges sont per-



7. RÉSEAU où les nœuds peuvent interagir (des «charges» peuvent être transférées de l'un à l'autre et, pour certains, avec l'extérieur). Le trait vert divise l'«intérieur» et l'«extérieur» du système. Le nombre de liaisons entre un nœud et ses voisins est variable, et la force de cette liaison peut être plus ou moins grande. La «charge» est une charge électrique, ou une quantité de fluide, ou autre chose encore : le modèle est générique et ne se réfère à aucun système physique particulier. La courbe rouge dans la figure de droite indique la densité spectrale que l'on obtient pour un réseau carré à deux dimensions tel que celui illustré en bas à gauche lorsque la «charge» qui entre dans le système est équilibrée par celle qui en sort. La région centrale de la densité spectrale est exactement du type $1/f$, tandis qu'elle s'aplatit aux basses fréquences et devient de type $1/f^2$ aux hautes fréquences. L'extension de la région du type $1/f$ dépend des caractéristiques d'entrée et de sortie du réseau : plus il est difficile d'entrer ou de sortir du réseau, plus la région en $1/f$ est étendue.

Edoardo MILOTTI est chercheur à l'Université de Trieste.

H. William PRESS, *Flicker Noises in Astronomy and Elsewhere*, in *Comments on Astrophysics*, n° 7, pp. 103-119, février 1978.

M.B. WEISSMAN, *1/f Noise and other Slow, Nonexponential Kinetics in Condensed Matter*, in *Review of Modern Physics*, n° 60, pp. 537-571, avril 1988.

W.E. ITANO et N.F. RAMSEY, *La misura precisa del tempo*, in *Le Scienze*, n° 301, p. 36, septembre 1993.

Edoardo MILOTTI, *Linear Processes that Produce 1/f or Flicker Noise*, in *Physical Review*, E51, pp. 3087-3103, avril 1995.